

Matematikken i Danmark på Tycho Brahes tid

Et undervisningsforløb i matematikkens historie målrettet 2. og 3. g.

AF ESSEN WENDT LORENZEN

Matematikken som historisk vindue

Matematik som videnskab er ikke grundlagt i en enkelt periode af menneskehedens historie. Matematikken har været en forudsætning for civilisationers overlevelse og har vist sig uundværlig, når mennesket kigger ud og forsøger at forstå sig selv og verden. Når jorden dyrkes, når der købes og sælges, når hære mobiliseres til krig, når det retfærdige samfund indrettes, når årstiderne, himmellegemerne, naturen og mennesket studeres, så er matematiske færdigheder i alle tilfælde en nødvendighed. Matematik er af den grund også en af de ældste videnskaber overhovedet. Dens rødder går tilbage til de tidlige civilisationer i Babylon, Egypten, Kina og Indien i det andet årtusinde f.Kr. Matematikken blomstrede allerede i det antikke Grækenland, og den var lige så sammenvævet med græsk kultur som filosofi, demokrati og andre videnskaber. I 800-tallet e.Kr. begyndte en opblomstring af matematik og naturvidenskab blandt araberne, som europæerne fik kendskab til i løbet af middelalderen. Omkring 1500-tallet begyndte de vestlige naturvidenskabsmænd at bidrage med selvstændige arbejder og resultater. I renæssancen udviklede matematikken sig særligt på områder som perspektivtegning, astronomi, navigation og korttegning.

Menneskehedens udvikling og matematikkens udvikling spejler sig i hinanden. Søger man historisk indsigt, kan matematikkens historie derfor ofte give interessante perspektiver på idéhistorie og mentalitetshistorie. Matematikken kan altså være som et historisk vindue. Det er netop tanken i det følgende, hvor der skal tegnes et billede af Danmark på Tycho Brahes tid set i lyset af den matematik, der blev praktiseret.

Matematikken dengang og nu.

Matematikken i 1500-tallet var stadig et godt stykke fra at være på den form, vi kender i dag. Endnu vidste man ikke noget om logaritmer, differential- og integralregning, sandsynlighedsregning eller vektorer. Emner, der i dag er helt centrale. Man kunne løse ligninger, men ligninger af højere grad end to voldte stadig store problemer. En lang række af de grundlæggende begreber, som vi i dag

tager for givet, manglede ligeledes at blive indbygget i matematikken. F.eks. talte man endnu ikke om koordinatsystemer og funktioner. Og ser man på talbegrebet, så var det stadig uklart, hvad man skulle forstå ved de negative tal. Matematikkens første egentlige blomstringsperiode efter antikken er 1700- og 1800-tallet. Størsteparten af den matematik, der bruges i undervisningen i dag, er netop fra denne periode. Opregner man de discipliner, som matematik dækkede over i 1500-tallet, så ser man, lidt forenklet, at der er tale om aritmetik (altså sædvanlig regning med tal), algebra (dvs. løsning af ligninger) og geometri.

Matematikkens symboler

Får man en matematiklærebog i hånden fra den tid, er der også andre forhold, der falder i øjnene. Selve det at skrive matematik foregik på en helt anden måde, end vi gør det i dag. For det første var det videnskabelige sprog i Danmark latin som i resten af Europa. Det betød, at alle videnskabelige tekster samt hovedparten af alle skolebøger var skrevet på latin. Men det er ikke den eneste vanskelighed. Får man nemlig oversat latinen til dansk, ser man, at matematikken tager sig væsentlig anderledes ud. Hvor vi i dag ville skrive

$$ax^2 + bx = c$$

ville man dengang formulere sig i ord og f.eks. skrive

et givet tal gange med kvadratet, adderet til dets rod ganget med et givet tal udgør et givet tal.

Det afgørende er her, at matematiksymboler som f.eks. x , y og z for ubekendte størrelser; a , b , c osv. for kendte størrelser samt regnetegn som $+$, $-$, $:$, $/$, $\sqrt{\quad}$, $<$, $>$, $=$ endnu ikke var blevet en selvfølgelig del af det matematiske sprog. Kun gradvist vinder en symbolsk tilgang til matematikken indpas. Man skal ind i 1600-tallet, før man finder en matematisk symbolik i stil med, hvad vi anvender i dag. Det kan måske virke overraskende, at symbolsproget ikke naturligt fulgte med, når man tidligere skulle nedskrive matematiske udtryk og formler. En forklaring kan være, at der måske skal foretages et betragteligt spring i abstraktion, når man går fra at tale om konkrete tal som 5, 7 og 12, og at f.eks. summen af fem og syv er tolv, til mere alment at tale om tal som a , b og c og f.eks. at $a + b = c$. Et spring, der forudsætter, at man kan se bort fra indhold og kun fokusere på form, og et spring, der kan være mange hundrede år undervejs.

Man kunne her foretage en sammenligning med indførelsen af de negative tal, som også først falder fuldt på plads i løbet af 1600-tallet. Siden oldtiden har man kunnet regne med negative tal ved f.eks. at tænke gæld således, at har jeg 5 mønter, men bliver afkrævet 7 mønter, ja, så skylder jeg 2 mønter. Men at forestille sig tallet -2 på helt lige fod med tallene 5 og 7 var vanskeligt. Så sent som i 1600-

Opgave 1

a) Diskuter i klassen forskellige mulige grunde til, at symboler i matematikken og negative tal først meget sent vinder indpas. Prøv at drage sammenligning til, da I selv første gang skulle prøve at forstå symbolet x som gældende for en ubekendt størrelse.

b) Når vi i dag taler om andengradsligningen $ax^2 + bx + c = 0$, tænker vi koefficienterne a , b og c som kendte, enten positive eller negative tal, og for b og c 's vedkommende evt. 0. Prøv at opstille alle de mulige typer andengradsligninger, der findes, hvis koefficienterne ikke kan tænkes at være negative tal.

c) Diskuter, hvilken betydning det kan have haft for matematikkens udvikling, at symbolikken, ligesom selve talbegrebet, tidligere var ganske mangelfuld.

tallet, på trods af at man fuldt ud mestrede at løse ligninger, ser man eksempler på, at man skelnede mellem de virkelige, sande tal – som er de positive – og så de umulige, falske tal – som er de negative. Således ville der på det tidspunkt intet problem være i at vise, at ligningen $x^3 + 6 = 7x$ har løsningerne 1, 2 og -3. Men stadig kunne man finde på at sige, at 1 og 2 er de eneste virkelige løsninger. Som før kunne en forklaring være, at springet til at tænke sig de negative tal ligestillet med de positive er et ganske betragteligt spring, der stiller store krav til abstraktion.

Skolematematik i 1500-tallet

Grundskolerne i Danmark i 1500-tallet var opdelt i to typer skoler. Dels *latinskolen*, hvor undervisningen foregik på latin, og dels *den danske skole*, der, som det fremgik af en befaling fra kong Christian 3. i 1539, var oprettet for

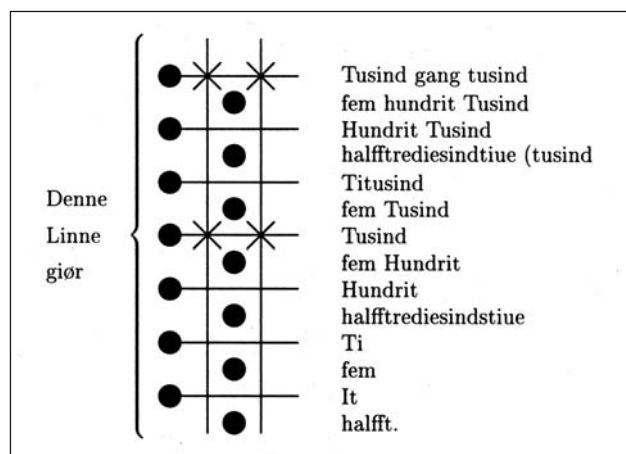
... drenge oc piger, oc andre der icke duer til at lære latine ...

Undervisnings sproget var ikke den eneste forskel mellem de to typer skoler.

Den danske skole havde som formål at lære eleverne skrivning og almindelig regning, foruden – og nok så vigtigt – sand gudfrygtighed. Der blev læst i katekismus, og der blev regnet, hvilket dækkede over træning i de fire regningsarter addition, subtraktion, multiplikation og division samt brøkgregning og kvadratrodsuddragning. En mere teoretisk tilgang til matematik var der ikke tale om, da målet i langt højere grad var at øve eleverne i praktisk regning til brug i hverdagsituationer som f.eks. opgørelse af en købmandsregning. Geometri indgik almindeligvis ikke. Nedenfor er der gengivet et uddrag fra regnemesteren Anders Oluffssøns regnebog, der udkom første gang i 1560. Uddraget handler om regning på *regnebrættet*, hvilket var en plade inddelt i felter, hvorpå man med sten eller mønter kunne udføre simple regnestykker.

Her efterfølger/ Huorledis mand skal forstaa linnerne/ oc Species.

Vdi denne effterfølgende Figur/ skalt du mercke/ At den første eller nederste linne bemercker It/ Den anden Ti/ Den tredje Hundret/ Den fjerde Tusinde etc. oc saa frem at/ Oc huer rom for sig/ som er imellem huer i to Linner/ bemercker eller gjør icke vden halffparten saa megit som denne Linne gjør/ der næst offuen for er. Oc skalt du betegne huer fjerde Linne met it Kaarss/ paa det at du kand vide/ at denne Linne/ som Kaarss set staar paa/ bemercker dig Tusinde/ oc bemercker det Kaarss lige saa meget/ som Pricke gjør/ som dig tilforne er lært/ at sætte offuer huer fjerde Figur. Som denne efterfølgende Figur oc Taffle vduiser.



Figur A-F er alle taget fra Jesper Lützen og Kurt Ramskov *Kilder til matematikkens historie*, 2. udgave HCØ tryk 1999 s. 63-65. Lützen og Ramskov gengiver her Anders Oluffssøn, *En ny konstig regne Bog, vdi Tal og Maader oc Vector, paa Lynnerne och met Ziffre...*, København 1607.

Figur A

Her effterfølger at Addere oc sammen legge mange Tal vdi en Sum.

Addition.

Denne Species lærer dig at Summere/ oc sammen legge mange haande Tal i en sum.

Den Første Regel.

Her skalt du mercke/ at du skalt gjøre oc skiffte saa mange Rom paa Linnerne/ som der atskillige slags Mynt oc Penninge forhaanden til/ saa at huer slags Mynt/ kommer at ligge vdi deris besynderlige Rom. Daler for sig/ March for sig/ Skilling for sig oc Penninge for sig etc.

Men for alting skalt du mercke/ acte oc vide/ disse try stycker som her effterfølger.

For det Første.

Når fem Penninge kommer at ligge på Linne/ da skalt du tage dennem op/ oc legge en Penning i det Rom/ som imellem næst offuenfaare er. Som disse effterfølgende Linner vduiser.

For det andet.

Naar der ligger fem Penninge på Linnen/ oc en Penning imellem i det rom næst offuen faare/ da tag de fem Penninge op/ som ligger paa Linnen/ oc den Penning som ligger imellem/ oc leg derfor en Penning/ paa den anden Linne næst offuen faare/ oc bemercker saa Ti/ thi fem Penninge paa Linnen/ oc den ene som mercker fem imellem Linnerne/ Gior Ti. Som du her ser.

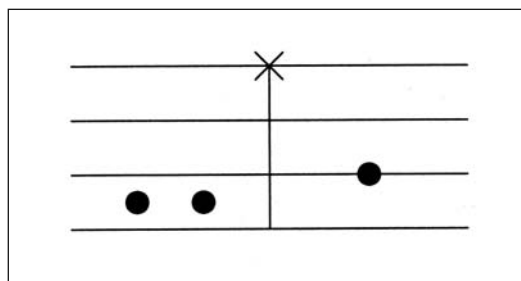
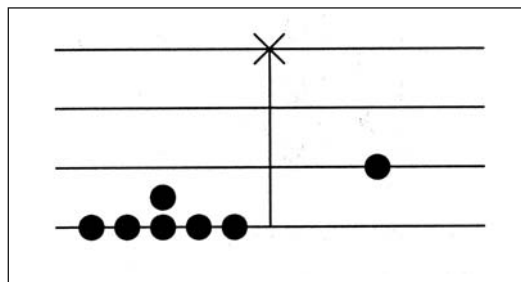
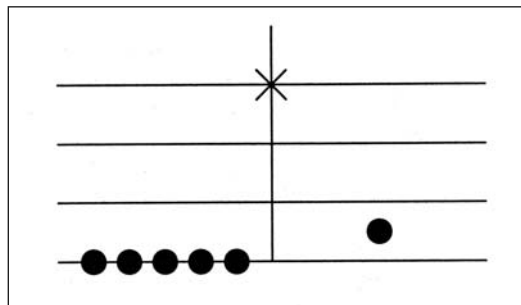
For det Tredje.

Naar to Penninge kommer at ligge vdi it Rom imellem to Linner/ da tag samme to Penninge op/ oc leg derfaare en Penning paa den Linne der næst offuen faar er/ Som disse effterfølgende Linner vduiser.

Eksempel.

Item/ En Suend eller Tienere haffuer anammit paa sin Herris vegne/ disse effterfølgendis Penninge/ Nu vilde ieg gierne vide, huor megit samme effterfølgende Penninge beløber sig vdi en Sum.

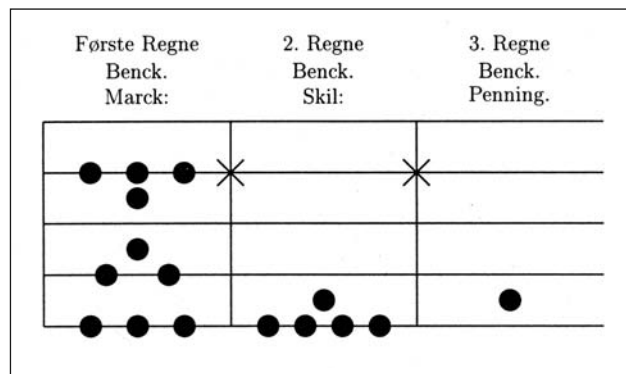
Figur B, C, D



1234	} Marck	19	} Skilling	5	} Penning
345		18		8	
567		15		2	
789		13		7	
102		7		3	
200		10		6	
220		9		9	
110		11		1	
<u>3567</u>		<u>102</u>		<u>41</u>	
3573		9		5	

Figur E

Leg nu først på Linnerne/ Marckene for sig/ dernæst Skillingerne/ i lige maade Penningene for sig/ da faar du som det første Tal neden faare vduiser/ Gjør nu de Penninge til Skillinge/ oc saa de Skillinge til Marck/ da faar du som det andet oc nederste Tal vduiser/ oc er den rette Sum/ Huilcken paa Linnerne ligger/ Som her effterfølger.



Figur F

Opgave 2

a) Læs Anders Oluffssøns tekst omhyggeligt. Det gamle danske kan se svært ud ved første øjekast, men prøv at gøre brug af følgende generelle regler: bogstaverne u og v samt i og j skal ofte ombyttes i forhold til nutidsdansk. Sammenstillingerne ffu eller ff skal ofte erstattes med v i forhold til nutidsdansk.

b) Lav selv et regnebræt på papir eller karton, og efterprøv Oluffssøns additionsteknik ved at lave regnestyk-

kerne $47 + 59$ og $121 + 233 + 458$ på regnebrættet. Du kan med fordel gøre brug af en håndfuld småmønter.

c) Kan man lave subtraktion på regnebrættet?

d) I Oluffssøns eksempel optræder de gamle møntenheder mark, skilling og penning. Regn eksemplet igennem og se, om du kan gennemskue, hvad omregningsforholdet var mellem disse tre mønter?

Den additionsteknik, vi benytter, hvor vi tæller enere, om muligt veksler til tiere, tæller tiere osv. blev også benyttet den gang. Regnebrættets styrke lå i, at det var bekvemt til købmandsregning, der ellers var besværliggjort af de skæve vekselforhold mellem datidens mønter.

Geometrien i latinskolen

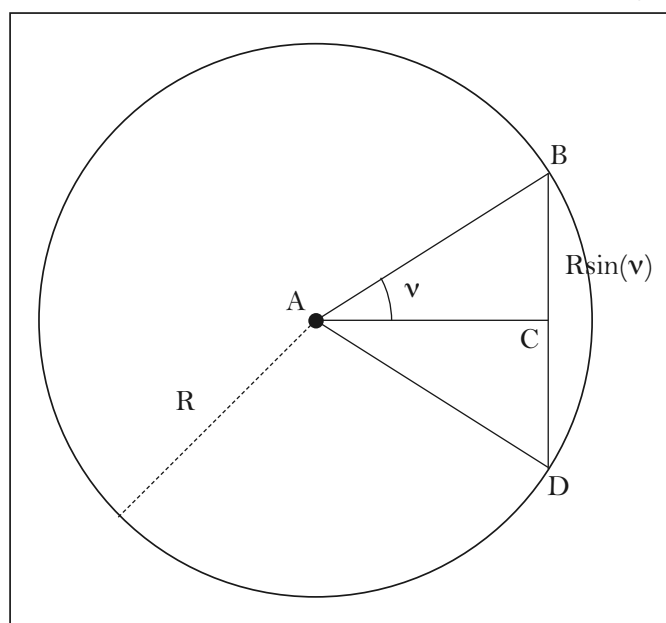
I modsætning til den danske skole var latinskolen mere teoretisk orienteret, fagligheden større og lærerne ofte bedre uddannede, almindeligvis fra universitetet. Skolernes primære opgave var stadigvæk at forberede unge til at blive præster, men latinskolerne skulle også uddanne folk til den voksende statsadministration. Undervisningen var gratis, men alligevel kom de fleste børn fra det bedre borgerskab; der var en større status forbundet med at gå i latinskolen. Adelen sendte deres sønner til de store latinskoler i domkirkebyerne, til tyske skoler, eller de fik privatundervisning. Nogle latinskoler optog piger, men det var ikke almindelig praksis. Hvad angik matematikken, så var undervisningen her ikke rettet mod almindelig købmandsregning.

Nedenfor er der gengivet og oversat fra latin et uddrag af matematikeren Jørgen C. Dybvads *Practica præcipuæ triangulorum planorum* 'Praktisk fremstilling af den fortrinlige lære om trekantene' fra 1577, som var en af de geometribøger, der blev benyttet i latinskolen i 1500-tallet. I uddraget introduceres grundlæggende geometriske begreber.

1. *En bue er en del af en cirkels omkreds*
2. *Sinus er midten af en korde til den halve bue, når først- og sidstnævnte er delt i lige store dele*
3. *Differensen mellem en kvadrant og en hvilken som helst bue kaldes buens komplement*
4. *Vinklens komplement er forskellen mellem den selv og den rette vinkel*
5. *En ligesidet trekant er en, som er indesluttet af tre lige store sider*
6. *En ligebenet trekant er en, som er indesluttet af kun to lige store sider*
7. *En uligesidet trekant er en, som er indesluttet af tre ulige store sider*
8. *En retvinklet trekant er en, som har en ret vinkel*
9. *Den del af basen som er afskåret mellem en side og højden kaldes sidens vinkelrette fald*

De fleste af definitionerne er de samme som dem, vi benytter i dag, men særlig én falder udenfor, nemlig definitionen af sinus. I dag defineres sinus som bekendt vha. enhedscirklen tegnet i et koordinatsystem. Tidligere, dvs. før man benyttede koordinatsystemet, blev sinus defineret på baggrund af korder, hvor en korde er et liniestykke, der afskærer en cirkelbue. Figur 1 viser en cirkel med centrum i A og radius R. Desuden er afsat korden BD, der spænder over vinklen $2v$, og vinkelret på korden gennem A er afsat linien AC. Halvdelen af korden er liniestykket BC, og dens længde er ifølge Dybvads definition netop sinus til vinkel v . Da cirklen har radius R, har den halve korde BC – med det nutidige sinusbegreb – længden $R\sin(v)$. Dybvads definition af sinus er altså gjort afhængig af radius i den cirkel, hvori korden betragtes. Derfor ser man også i mange geometribøger fra dengang betegnelsen S.R for sinus, for netop at understrege afhængigheden med radius R. I dag er vi vant til at udregne $\sin(v)$ vha. lommeregneren. Den mulighed havde man naturligvis ikke dengang. I stedet benyttede man sinustabeller, hvor værdien S.R, dvs. længden af den halve korde BC, for et fastholdt R, var angivet for en lang række vinkler v . Sinustabellerne, hvoraf de ældste går tilbage til ca. år 150 f.Kr., kunne man konstruere ved at gøre brug af en masse kompliceret geometri.

Fig. 1.



Opgave 3

- a) Repeter den moderne definition af sinus og cosinus, og overbevis dig selv om, at S.R til vinklen ν netop er $R\sin(\nu)$.
- b) Brug figur 1 til at argumentere for, at S.R til 90° netop er radius R .
- c) Lån en sinustabel på skolen og aflæs $\sin(20^\circ)$ og $\sin(79^\circ)$. Tjek resultaterne på lommeregneren.
- d) Vis, at liniestykket AC på figur 1 har længden $R\cos(\nu)$.

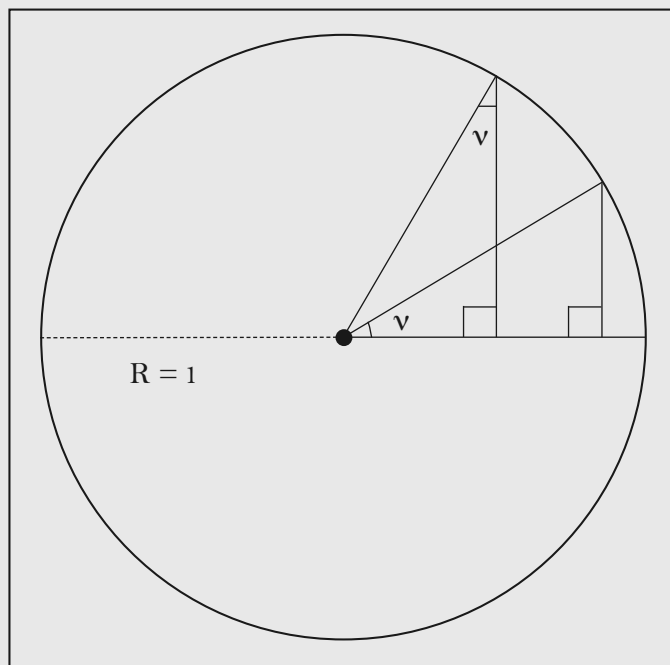
Har man en sinustabel har man også samtidigt en cosinustabel, idet der gælder overgangsformlen $\cos(\nu) = \sin(90^\circ - \nu)$.

I overensstemmelse med Dybvads definition 4 er $90^\circ - \nu$ komplementet til vinkel ν , og ved at slå $\sin(90^\circ - \nu)$ op i en sinustabel finder man altså $\cos(\nu)$.

Opgave 4

- a) Aflæs $\cos(35^\circ)$ og $\cos(47^\circ)$ i en sinustabel.
- b) Benyt figur 2 til at vise overgangsformlen $\cos(\nu) = \sin(90^\circ - \nu)$.

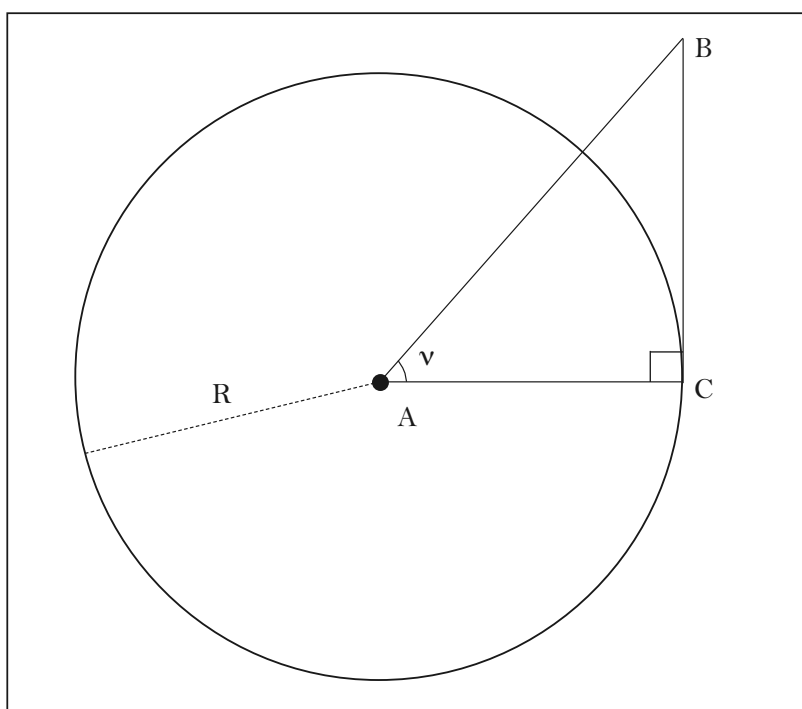
Fig. 2.



- c) I gamle geometribøger ser man sjældent cosinus defineret. Diskuter, hvad grunden til dette kunne være.

Matematikeren Thomas Fincke

En af de vigtigste danske matematikere i 1500-tallet var Thomas Fincke, og hans lærebog i geometri *Geometriæ Rotundi* 'De rundes geometri' fra 1583 opnåede stor udbredelse både i Danmark og i udlandet. Bogen blev ikke kun benyttet i latinskolen, men fandt også vej til Københavns Universitet, der på det tidspunkt var det eneste universitet i Danmark. Som i Dybvads lærebog indførte Fincke i sin lærebog begrebet sinus, men derudover også begrebet cosinus og som den første i Europa begreberne tangens og secans. Betragtes figur 4, så definerede Fincke tangens til vinklen v som længden af liniestykket BC og secans til vinklen v som længden af liniestykket AB. I lighed med definitionen af sinus er også tangens og secans gjort afhængige af radius af den cirkel, hvori vinklen betragtes.



Figur 3. Thomas Fincke (1561-1656).
Foto: Det Nationalhistoriske Museum
Frederiksborg Slot.

Figur 4.

Opgave 5

- Betragt figur 4 og vis, at liniestykket BC har længden $R \tan(v)$.
- Hvordan stemmer Finckes definition af tangens overens med den definition af $\tan(v)$ som vi benytter i dag?
- Funktionen secans, med symboler $\sec(v)$, benyttes også i dag og defineres ved $\sec(v) = \frac{1}{\cos(v)}$.
Vis, at længden af liniestykket AB er $R \sec(v) = \frac{R}{\cos(v)}$, og redegør for sammenhængen mellem Finckes definition af secans og den moderne definition af $\sec(v)$.
- Bestem definitionsområdet for $\sec(v)$ og tegn dens graf.

Fincke viser i *Geometriæ Rotundi* også en række praktiske anvendelser af geometri, og han gav en beskrivelse af måleinstrumenter, der kan finde anvendelse, når man står med en geometrisk problemstilling. Et sådan instrument var kvadranten, der bl.a. kunne benyttes som en vinkelmåler. På figur 5 er der vist en kvadrant, som Tycho Brahe fik bygget i 1573. Grundlæggende er der tale om en ret vinkel lavet af f.eks. to stykker træ, og imellem disse stykker træ, langs en bue, er der placeret en måleskala, der indeholder graderne $0^\circ - 90^\circ$. Kvadranten kan blandt andet benyttes til at bestemme længder, højder eller bredder, hvor det ellers ikke er muligt at foretage en direkte måling. Fincke illustrerer teknikken med en tegning, der her er gengivet med figur 6. Tegningen forestiller en mand med en kvadrant, der fra sin position A uden for bymuren og voldgraven ønsker at bestemme hhv. voldgravens bredde og bymurens højde. Dermed kan han nemlig bestemme længden på en stige, der kan bringe ham over graven og muren og ind i byen. Situationen rummer to retvinklede trekanter, hhv. $\triangle Abc$, der ligger i plan med voldgravens overflade, og $\triangle bcd$, der som sider har gravens bredde, murens højde og stignens længde.



Figur 5.

En kvadrant bygget af Tycho Brahe i 1573.

Illustration fra Tycho Brahes bog
Astronomia Instaurata Mechanica, 1598.

Foto: Det Kgl. Bibliotek



Figur 6.

Illustration fra Thomas Finckes bog
Geometriæ Rotundi s. 307, 1583.

Foto: Det Kgl. Bibliotek, KUB.

Opgave 6

a) Vi forestiller os, at manden på tegningen først måler vinkel A i $\triangle Abc$ med sin kvadrant og dernæst længden $|Ab|$. Forklar, hvorfor han nu kan bestemme voldgravens bredde $|bc|$ vha. formlen $|bc| = |Ab| \tan(A)$.

b) Manden måler dernæst vinkel b i $\triangle bcd$ med kvadranten. Hvordan kan murens højde nu bestemmes?

c) Og stignens længde, hvordan kan den nu beregnes?

d) Beregn stignens længde, når $A = 68,20^\circ$, $b = 56,31^\circ$ og $|Ab| = 1,2$.

For at understrege vigtigheden af at kunne sin geometri lader Fincke efterfølgende læseren forstå, at

når bredden og dybden er kendt, kan man fremstille en stige, der er lang nok og egnet til indtrængen. Ifølge Polybium bragte Philippus ikke lange nok stiger til Maltesernes by, hvilket medførte en alvorlig katastrofe, hvor man måtte trække sig tilbage. (Geometriæ Rotundi, s. 308)

Gode kvadranter var konstrueret, så man kunne aflæse vinkler med stor nøjagtighed ved at have en måleskala opdelt også i brøkdele af grader. I stedet for at tale om tidendedele af en grad, hundrededele af en grad osv. – som når vi i dag skriver $43,21^\circ$ – benyttede man dengang en opdeling i bueminutter og buesekunder, hvor 60 bueminutter var 1° og 60 buesekunder var 1 bueminut. For vinklen 43° , 12 bueminutter og 36 buesekunder ville man skrive $43^\circ 12' 36''$, og da

$$43 + \frac{12}{60} + \frac{36}{60^2} = 43,21$$

må der netop gælde, at $43^\circ 12' 36'' = 43,21^\circ$. Opdelingen i grader, bueminutter og buesekunder bruges også i dag indenfor navigation.

Opgave 7

- Omregn vinklerne $76^\circ 54' 17''$ og $11^\circ 11' 11''$ til den sædvanlige decimalfremstilling.
- Udtryk vinklen $37,19^\circ$ på den gammeldags måde med grader, bueminutter og buesekunder.

Figur 7. Longomontanus (1562-1647).
Stik fra 1644.
Foto: Det Kgl. Bibliotek. KUB.

Tycho Brahes regnemester Longomontanus

I 1500-tallet var det endnu kun få personer, der kunne leve af at være matematikere i Danmark. Naturligvis var der mulighed for at fungere som matematiklærer i latinskolen eller evt. som huslærer eller privatlærer for bedrestillede familiers børn. På landets eneste universitet, Københavns Universitet, var der et par enkelte professorater i matematik, som dog var svære at få, da universitetsstillinger ofte gik i arv. Men derudover var mulighederne begrænsede. Enkelte personer var dog beskæftiget med matematik i tilknytning til landmåling og astronomi. I 1500-tallet havde man endnu ikke præcise landkort; det første egentlige kort over Danmark blev udgivet så sent som i 1552. Til korttegning benyttede man dengang triangulering, hvilket dækker over, at man ved hjælp af trekanter udmåler det område, der skal kortlægges. Som landmåler måtte man derfor besidde store færdigheder indenfor geometri.



Astronomi blev i 1500-tallet anset som en særdeles vigtig disciplin. Traditionelt har der altid været stor status forbundet med faget. I anden halvdel af 1500-tallet var faget særligt begunstiget i Danmark – dels pga. Tycho Brahe, der med sine meget præcise astronomiske målinger vakte opsigt og anerkendelse i hele Europa, dels pga. Frederik 2. (1559-1588), der som målsætning havde, at Danmark skulle være foregangsland indenfor kultur og naturvidenskab, herunder astronomi. Kortlægning af himmellegemers position og bevægelse kræver i stor udstrækning matematik. Særligt geometri er uundværlig i og med, at stjernernes og planeternes positioner på himmelkuglen bestemmes ud fra de sfæriske trekanter, som stjernerne og planeterne indgår i. Ved en sfærisk trekant forstås en trekant på en kugleoverflade. Men også et stort og sikkert kendskab til at udføre manuelle beregninger var en matematisk nødvendighed for astronomien. Alle de talrige beregninger, enhver måling gav anledning til, skulle udføres i hånden og naturligvis med stor sikkerhed og præcision, før beregningen kunne bruges til noget. Derfor havde man også på denne tid, i tilknytning til astronomien, behov for såkaldte regnemestre, der som en slags menneskelige lommeregnere blev betroet den vigtige opgave at regne rigtigt – og regne meget! Tycho Brahe havde, mens han fungerede som astronom på Hven, ansat to regnemestre, Christen Sørensen og Paul Wittich, begge nøje udvalgt for deres matematiske kunnen.

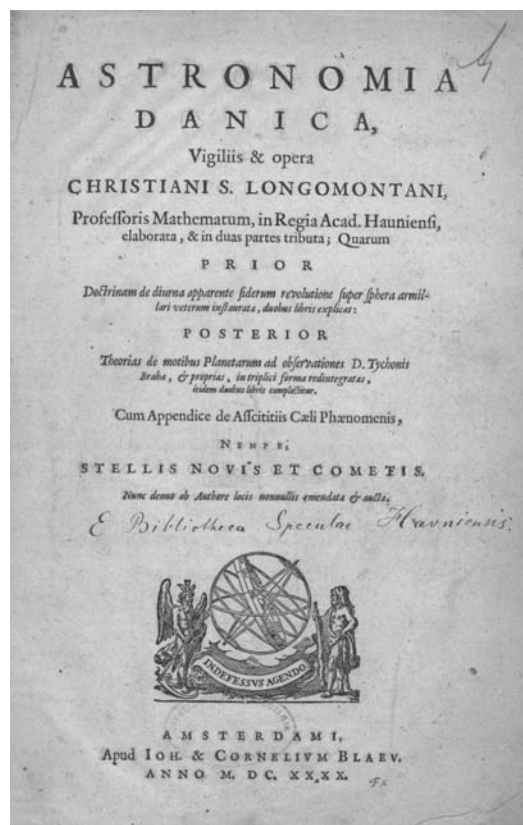
Christen Sørensen, eller Longomontanus, som han efter tidens skik valgte at kalde sig efter det latinske navn for hans fødeby Lomborg ved Lemvig, udgav i 1622 værket *Astronomia Danica*. Heri redegjorde han for de beregningsteknikker, der blev benyttet på Hven hos Tycho Brahe. Almindelig multiplikation er, når tallene indeholder mange cifre, ganske tidkrævende, og der er betydelig risiko for regnefejl undervejs. I *Astronomia Danica* beskriver Longomontanus en anden multiplikationsteknik, som blev benyttet på Hven, og som i mange situationer viser sig både hurtigere og mere sikker. Metoden kaldte han *prosthaphaeresis* efter de græske ord for addition og subtraktion. Den grundlæggende idé er da også netop at erstatte de arbejdsstunge multiplikationer med de mere bekvemme additioner og subtraktioner. Til metoden gør Longomontanus brug af følgende formel for vinklerne A, B og $A' = 90^\circ - A$:

$$\sin(A)\sin(B) = \frac{1}{2} [\sin(A'+B) - \sin(A'-B)]$$

Formlen kan også skrives på formen

$$\sin(A)\sin(B) = \frac{1}{2} [\cos(A-B) - \cos(A+B)],$$

og det er på den form vi kender den i dag, hvor den også går under navnet den logaritmiske formel.



Figur 8.
Titelbladet til Longomontanus'
Astronomia Danica, 1622.
Foto: Det Kgl. Bibliotek. KUB.

Opgave 8

Vis, at den formel Longomontanus benytter, kan omskrives til den logaritmiske formel. Vink: gør brug af overgangsformlen $\cos(v) = \sin(90^\circ - v)$.

Longomontanus' multiplikationsprincip kan nu anskueliggøres. Lad os forestille os to tal, $a = 729,8041$ og $b = 57,49138$, der skal ganges sammen. Det kan nu gøres på følgende alternative måde. Flyt kommaet i de to tal så mange pladser, at der fås to tal a_1, b_1 i intervallet $[-1,1]$. Det giver her

$$a \cdot b = a_1 \cdot b_1 \cdot 10^5 = 0,7298041 \cdot 0,5749138 \cdot 10^5.$$

Find dernæst vinklerne A og B , så $\sin(A) = a_1$ og $\sin(B) = b_1$, f.eks. ved at slå op i en sinustabel. Har man ikke en sinustabel, kan man naturligvis også bruge lommeregnerens \sin^{-1} -tast, men det ødelægger lidt af idéen med det hele. Man finder $A = 46,86997358^\circ$ og $B = 35,09359578^\circ$, og heraf kan også komplementvinklen til A beregnes: $A' = 90^\circ - A = 43,13002642^\circ$. Indtil nu må vi have, at

$$a \cdot b = a_1 \cdot b_1 \cdot 10^5 = \sin(A) \cdot \sin(B) \cdot 10^5.$$

I kraft af Longomontanus' formel, kan den arbejdstunge multiplikation $a_1 \cdot b_1 = \sin(A) \cdot \sin(B)$ som det næste erstattes med udregningen $\frac{1}{2} [\sin(A'+B) - \sin(A'-B)]$. Det involverer en addition, to subtraktioner, to tabelopslag og en halvering. Man finder, at $A'+B = 78,2236222^\circ$, $A'-B = 8,03643064^\circ$ og ved tabelopslag, at $\sin(78,2236222^\circ) = 0,9789516163$ og $\sin(8,03643064^\circ) = 0,1398027195$, hvorfor man får

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [\sin(A'+B) - \sin(A'-B)] &= \\ \frac{1}{2} [0,9789516163 - 0,1398027195] &= 0,41957445. \end{aligned}$$

Man har nu det endelige resultat af multiplikationen ab , idet der må gælde, at

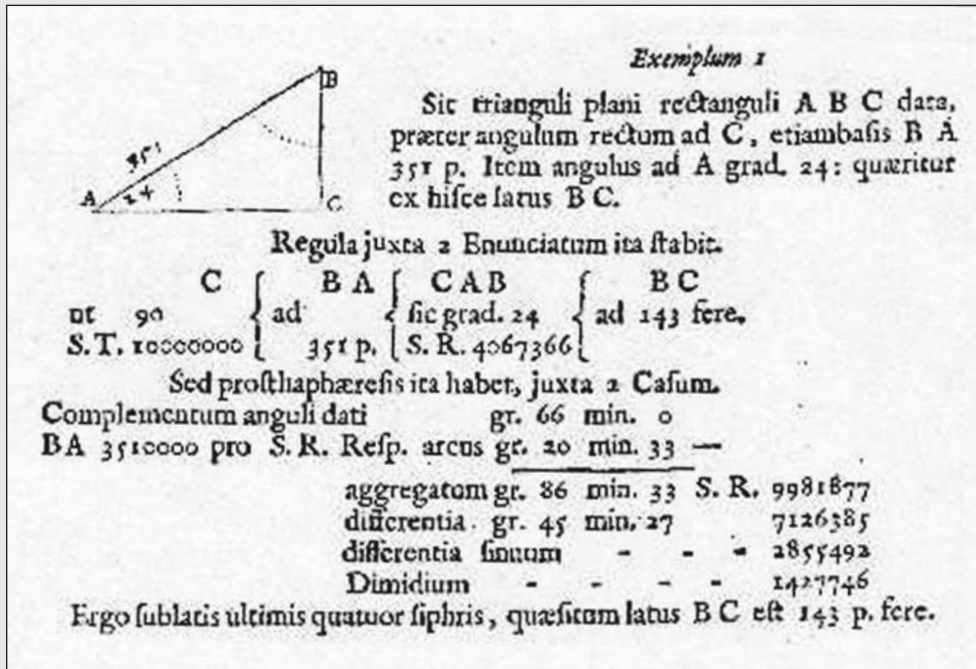
$$a \cdot b = 729,8041 \cdot 57,49138 = 0,41957445 \cdot 10^5 = 41957,445.$$

Opgave 9

a) Udregn på samme måde produktet af $a = 55,823163$ og $b = 4207,1751$. Det er bedst, hvis der benyttes en sinustabel undervejs. Har skolen ikke en sådan, så snyd, og brug lommeregneren til at bestemme vinklerne A og B . Alle andre udregninger skal foretages i hånden. Kontroller det endelige resultat med lommeregneren og kommenter på nøjagtigheden.

b) Udregn nu produktet af $a = 55,823163$ og $b = 4207,1751$ ved den sædvanlige folkeskolemetode og vurder, i hvilket omfang Longomontanus' multiplikationsteknik er en mere effektiv metode.

Nedenfor, på figur 9, er der vist et udklip fra Longomontanus' bog, hvor *prosthaphaeresis* bliver illustreret med en beregning på en retvinklet trekant. Til trods for, at det foregår på latin, så kan man godt få mening ud af det. Det oplyses, at sinus i teksten bliver symboliseret med S.R., at vinkler bliver angivet i grader (gr.) og bueminutter (min.), samt at decimalkommaet i alle tallene er udeladt, hvorfor man er nødt til at gætte sig til, hvor det skal stå. Feks. står der nederst tallet 1427746, og det viser sig at skulle læses som 142,7746.



Figur 9
Regneeksempel i
Longomontanus' bog
Astronomia Danica,
s. 10.
Foto: Det Kgl. Bibliotek.
KUB.

- a) Hvilken trekant er der tale om, hvilke sider/vinkler bliver oplyst, og hvad ønskes beregnet?
- b) Hvordan vil du regne opgaven? Opskriv det regneudtryk, der løser opgaven, og regn dig frem til det endelige resultat.
- c) Genfind resultatet fra b) i udklippet.
- d) Forestil dig nu, at resultatet i b) skulle udregnes vha. *prosthaphaeresis*. Hvilke to tal a og b er det, der skal ganges sammen? Lav udregningen som illustreret ovenfor.
- e) Under udregningen i d) optræder nogle vinkler. Angiv alle disse vinkler på formen med grader og bueminutter.
- f) Sammenlign din udregning, inkl. mellemregningerne, med den udregning, Longomontanus foretager i udklippet ovenfor.

Longomontanus' *prosthaphaeresis* blev allerede tidligt i 1600-tallet erstattet af en mere effektiv multiplikationsteknik. I 1614 blev logaritmerne opfundet af den skotske matematiker John Napier, dog ikke på den form, vi kender dem i dag. Men allerede to år efter videreudviklede englænderen Henry Briggs Napiers oprindelige idé til den

nu så velkendte titalslogaritme, og kendskabet til den bredte sig hurtigt til resten af Europa. Med logaritmeformlen

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$$

havde man da et særdeles effektivt redskab til at udføre multiplikationer, og det vandt hurtigt udbredelse, også i Danmark, og erstattede på den måde Longomontanus' *prosthaphaeresis*. Multiplikation vha. logaritmer blev benyttet helt frem til vor tid og trådte først i baggrunden med lommeregnerens fremkomst.

Opgave 11

- a) Repeter definitionen af $\log(x)$, og bevis formelen ovenfor.
- b) Lån en logaritmetabel på skolen, og prøv at gennemskue, hvordan man med ovenstående logaritmeformel kan udføre multiplikationer.
- c) Lån en matematiklærebog på skolen fra senest 1970'erne, og konstater ved selvsyn, at det ikke er mere end tredive år siden, at gymnasieelever lærte multiplikation vha. logaritmer.

Hvor kan jeg få mere at vide?

Matematik i Danmark 1500-1700, skrevet af Malene Marie Bak og udgivet på forlaget Steno Museets Venner, er en let tilgængelig historisk introduktion til emnet.

For de mere interesserede kan der henvises til to specialer ved Aarhus Universitet, som man sagtens kan læse som gymnasieelev, nemlig hhv.

Henrik Thørring Mikkelsens speciale, *Trykte danske aritmetikbøger indtil år 1800* fra 1998.

Eva Lundbek Hansens speciale, *Geometrien i Danmark før 1800* fra 1998.

Begge specialer kan man få tilsendt i kopi, hvis man tager kontakt til Aarhus Universitet, Institut for Videnskabshistorie.

Og så er Internettet altid godt. Prøv f.eks.

<http://www.matematiksider.dk/>

<http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html>

© Skoletjenesten

Forfatter: Esben Wendt Lorenzen

Redaktør: Vibeke Mader

Lay-out: Kristin Wiborg/Skoletjenesten

 **Skoletjenesten**



NATIONALMUSEET